**Druga domaća zadaća iz predmeta “Uvod u teoriju računarstva”**

**Student:**

**Matični broj studenta:**

**Zadatak broj 2024:**

Izgraditi jednoznačnu gramatiku koja generira matematičke izraze, te gradi generativno

stablo pazeći na prioritet operatora. Operatori su +, -, \*, /, ^, =. Najvišeg je prioriteta ^, zatim

\* i /, zatim + i -, i na kraju =. Izrazi se sastoje još i od varijabli i konstanti, s time da lijevo od

= može biti samo varijabla. Paziti na to da operatori -, / i ^ moraju biti lijevo asocijativni.

Pokazati generiranje izraza po izboru i nacrtati pripadno generativno stablo.

**Uvod**

**Gramatika**

Gramatika je skup pravila odnosno produkcija za generiranje jezika.

Kontekstno neovisna gramatika je uređena četvorka: G=(V, T, P, S)

V - konačan skup nezavršnih znakova;

T – konačan skup završnih znakova ( );

P – konačan skup produkcija oblika A→α, A je nezavršni znak, α je niz

znakova skupa (V T)\*, α može biti prazan niz ε;

S - početni nezavršni znak;

Kontekstno neovisna gramatika koristi se za definiranje sintakse programskih jezika.

Za zadanu gramatiku G=(V, T, P, S) definira se relacija nad nizovima iz skupa

(V T)\*.

Ako je A→β produkcija skupa P i ako su α i γ iz (V T)\*, onda vrijedi relacija

αAγ αβγ.

Niz αβγ generira se neposredno iz niza αAγ primjenom produkcije A→β, a oznaka G

određuje kojoj gramatici pripada primjenjena produkcija.

Neka su , , ..., nizovi iz (V T)\*, m≥1, i neka je

... ,

Gramatika G generira niz iz niza i to zapisujemo ovako: (sa

zvjezdicom iznad)

Relacija je refleksivno i tranzitivno okruženje relacije .

Zna li se na koju se gramatiku odnose relacije, umjesto tih oznaka koristi se 􀖜 i .

Neka pravila kod izgradnje gramatike:

• Nezavršni znakovi stavljaju se u zagrade < > kako bi se razlikovali od

završnih znakova

• Znak „→“ označava da je nezavršni znak na lijevoj strani moguće zamjeniti

desnom stranom produkcije

• Lijeva i desna strana znaka “→“ su lijeva i desna strana produkcije.

• Oznaka „|“ dijeli desne strane produkcija koje imaju istu lijevu stranu. Ima

istu funkciju kao „ili“ operator

• Zamjena nezavršnih znakova desnim stranama produkcija se nastavlja sve

dok u nizu ima nezavršnih znakova.

• Relacija „􀖜“ označava proces generiranja desnog međuniza znakova iz lijevog

međuniza znakova primjenom jedne od produkcija gramatike.

• Relacija označava višestruku primjenu pravila gramatike .

Generiranje niza završnih znakova prikazuje se i stablom. Stablom su prikazana sva

primjenjena pravila (produkcije) gramatike.

**Generativno stablo**

Stablo je generativno za gramatiku G = (V, T, P, S) ako vrijedi:

1) Čvorovi stabla označeni su znakovima iz V T {ε}

2) Korijen stabla označen je početnim nezavršnim znakom S

3) Unutrašnji čvorovi označeni su nezavršnim znakovima A 􀗐 V

4) Neka su čvorovi *n1, n2, ..., nk* svi čvorovi djeca čvora *n*. Ako je čvor n označen

znakom A i ako su čvorovi *n1, n2, ..., nk* označeni znakovima *X1, X2, ..., Xk*

onda je:

*A → X1 X2 ... Xk*

produkcija iz skupa *P*.

5) Znakom ε moguće je označiti list stabla. List stabla označen znakom ε je jedino dijete

svog roditelja, odnosno dijete jednog od unutarnjih čvorova.

6) Listovi stabla označeni su znakovima iz skupa T {ε} i čitani s lijeva na desno čine

generirani niz jezika L(G).

Neka gramatika G generira niz završnih znakova *w*. Relacija *S w*, gdje je w niz završnih

znakova, vrijedi ako i samo ako je moguće za gramatiku *G* izgraditi generativno stablo čiji su

listovi isključivno označeni znakovima niza *w* i znakom *ε*.

**Nejednoznačnost gramatike**

Interpretacija niza zasniva se na generativnom stablu koje se gradi tijekom generiranja niza.

Nejednoznačnost uzrokuje mogućnost gradnje više različitih stabala za jedan niz primjenom

jedne gramatike.

Primjer nejednoznačnosti gramatike:

Za zadanu gramatiku: G= ({S}, {a, \*},{ S→S\*S | a }, S ) i niz a\*a\*a moguće je napraviti 2

generativna stabla:

slika1

Postoji generiranje niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka i generiranje niza

zamjenom krajnje desnog nezavršnog znaka.

Generiranje niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka je generiranje niza u kojemu se

produkcije primjenjuju isključivo na krajnje lijeve nezavršne znakove međuniza.

Generiranje niza zamjenom krajnje desnog nezavršnog znaka je generiranje niza u kojemu se

produkcije primjenjuju isključivo na krajnje desne nezavršne znakove međuniza

Generativno stablo ima važnu ulogu u interpretaciji niza. Nastoji se izgraditi gramatika koja

za zadani niz gradi samo jedno generativno stablo.

• Za bilo koji niz kontekstno neovisne gramatike moguće je izgraditi jedno ili više

različitih generativnih stabala.

• Bilo koje generativno stablo moguće je izgraditi primjenim jednog ili više različitih

postupaka generirajna niza.

• Bilo koje generativno stablo moguće je izgraditi primjenom jednog i samo jednog

postupka generiranja niza zamjenom krajnjeg lijevog nezavršnog znaka. Bilo koje

generativno stablo moguće je izgraditi primjenom jednog i samo jednog postupka

generiranja niza zamjenom krajnjeg desnog nezavršnog znaka.

Nejednoznačnost gramatike definira se na sljedeći način:

Ako je moguće za neki niz w L(G) izgraditi više različitih generativnih stabala, onda je

konteksno neovisna gramatika nejednoznačna.

Ako je moguće neki niz w L(G) generirati primjenom više različitih postupaka generiranja

niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka ili primjenom više različitih postupaka

generiranja niza zamjenom krajnje desnog nezavršnog znaka, onda je gramatika G

nejednoznačna.

**Ostvarenje**

Izrazi se sastoje od operatora, varijabli i konstanti.

Opratori: (od višeg prioriteta prema nižem)

• ^ (operator potenciranja, definirano kao lijevo asocijativan)

• \* , / (operator množenja i operator djeljenja, lijevo asocijativni)

• +, - (operator zbrajanja i operator oduzimanja, lijevo asocijativni)

• = (operator jednakosti)

Operatori su u skupu završnih znakova:

{ ^, \*, /, +, -, = } T

Prioritet postižemo tako da generiramo prvo operacije manjeg prioriteta, pa idemo

prema operacijama većeg prioriteta.

Na primjer - polazimo od zbrajanja 2 elementa. Pišemo produkciju koja izraz dijeli na

zbroj 2 elementa. Svaki pribrojnik te produkcije rastavimo kao umnožak 2 elementa,

a svaki množitelj kao potenciju...

Primjer:

<izraz> → <izraz> **+** <umnozak>

<umnozak> → <umnozak> \* <potencija>

<potencija> → <faktor>**^**<potencija>

Asocijativnost postižemo tipom rekurzije. Lijeva rekurzija za lijevo asocijativne

operatore ( ^, \*, /, +, - ), a desna za desno asocijativne.

Gramatika je lijevo rekurzivna ako možemo pronaći nezavršni znak *A* koji će s vremenom

biti korišten u postupku generiranja niza sa sobom sadržanim na krajnje lijevom mjestu

desne strane produkcije.

Primjer:

<izraz> → <izraz> **+** <umnozak>

Gramatika je desno rekurzivna ako možemo pronaći nezavršni znak *A* koji će s vremenom

biti korišten u postupku generiranja niza sa sobom sadržanim na krajnje desnom mjestu

desne strane produkcije.

Primjer :

<potencija> → <faktor>**^**<potencija>

Definiramo <varijabla> i <konstanta> kao nezavršne znakove gramatike

{<varijabla>, <konstanta>} V

Definiramo varijablu kao bilo koji niz slova i brojeva s time da je prvi znak slovo.

Za prepoznavanje varijable potrebne su nam dakle sljedeće produkcije:

<varijabla>→<slovo><niz>

<niz>→<znamenka><niz> |<slovo><niz> |ε

<znamenka> → 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

<slovo>→a|b|c|d|e|f|g|h|i|j|k|l|m|n|o|p|q|r|s|t|u|v|w|x|y|z|A

|B|C|D|E|F|G|H|IJ|K|L|M|N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z

Za potrebe definiranja varijabli dodali smo nove nezavršne znakove u skup V, kao i

sve znamenke (0-9) i mala i velika slova engleske abecede (a-z, A-Z) u skup završnih

znakova T

{<varijabla>, <konstanta>, <slovo>, <niz>, <znamenka>} V

{ ^, \*, /, +, -, =, 0-9, a-z, A-Z} T

Konstantu definiramo kao bilo koji realni broj, pa je stoga potrebno dodati

produkcije:

<konstanta> → <broj> | (-<broj>)

<konstanta> →<broj>.<broj> | (-<broj>.<broj>)

<broj>→<znamenka> |<broj><znamenka>

Skup V proširujemo nezavršnim znakom <broj>, a skup T završnim znakom .

(točka). Ostale završne i nezavršne znakove koje koristimo u ovim produkcijama već

su definirane prethodno.

{<varijabla>, <konstanta>, <slovo>, <niz>, <znamenka>, <broj>} V

{ ^, \*, /, +, -, =, ., 0-9, a-z, A-Z} T

Sada možemo kao konstante koristiti višeznamenkaste, pozitivne i negativne, cijele i

brojeve s pomičnim zarezom.

U zadatku je zadano da se izrazi sastoje od varijabli i konastanti s time da s lijeve

strane operatora „=“ može biti samo varijabla.

Zbog toga će prva produkcija koja kreće od početnog nezavršnog znaka S izgledati

ovako:

S → <varijabla> = <izraz>

(npr: x= 3\*y; var=6^2+32)

Desnu stranu dakle počinjemo s nezavršnim znakom <izraz>, i dodajemo još

produkcije koje sadrže nezavršne znakove <umnozak>, <potencija> i <faktor>.

To nam je dovoljno da definiramo gramatiku i pripadne produkcije:

(Nezavršne znakove ćemo označiti podebljanim slovima (**bold**))

G=(V, T, P, S)

V = { S, <varijabla>, <konstanta>, <slovo>, <niz>, <znamenka>, <broj>,

<izraz>, <umnozak>, <potencija>, <faktor>}

T = { **^,** \*, **/**, **+**, **-**, **^**, **=**, **.**, **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, **j**, **k**, **l**, **m**, **n**,

**o**, **p**, **q**, **r**, **s**, **t**, **u**, **v**, **w**, **x**, **y**, **z**, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K**, **L**, **M**, **N**, **O**, **P**, **Q**, **R**,

**S**, **T**, **U**, **V**, **W**, **X**, **Y**, **Z** }

P = {

1. S→<varijabla>=<izraz>

2. <izraz>→<umnozak>

3. <izraz>→<izraz>+<umnozak>

4. <izraz>→<izraz>-<umnozak>

5. <umnozak>→<potencija>

6. <umnozak>→<umnozak>\*<potencija>

7. <umnozak>→<umnozak>**/**<potencija>

8. <potencija>→<faktor>

9. <potencija>→<potencija>**^**<faktor>

10. <faktor>→<varijabla> | <konstanta>

11. <varijabla>→<slovo><niz>

12. <konstanta> → <broj> | -<broj>

13. <konstanta> →<broj>.<broj> | -<broj>.<broj>

14. <broj>→<znamenka> | <broj><znamenka>

15. <niz>→<znamenka><niz> | <slovo><niz> |**ε**

16. <znamenka>→**0**|**1**|**2**|**3**|**4**|**5**|**6**|**7**|**8**|**9**

17. <slovo>→**a**|**b**|**c**|**d**|**e**|**f**|**g**|**h**|**i**|**j**|**k**|**l**|**m**|**n**|**o**|**p**|**q**|**r**|**s**|**t**|**u**|**v**|**w**|**x**|**y**|

**z**|**A**|**B**|**C**|**D**|**E**|**F**|**G**|**H**|**I|J**|**K**|**L**|**M**|**N**|**O**|**P**|**Q**|**R**|**S**|**T**|**U**|**V**|**W**|**X**|

**Y**|**Z**

}

Primjer matematičkog izraza (niz završnih znakova gramatike):

x = -3^4\*2.6+21/7-2^x2

Gramatika generira ovaj niz sljedećim produkcijama:

(nezavršni znakovi koji se zamjenjuju desnim stranama produkcija u sljedećem

koraku su podcrtani, a desne strane produkcija kojima smo ih zamjenili su u boji

kako bi se lakše pratla primjena pravila gramatike)

S 􀖜 􀵏varijabla> = <izraz> (1. Produkcija)

􀖜 􀵏slovo􀵐􀵏niz􀵐 􀵌 <izraz> (11. Produkcija)

􀖜 x􀵏niz􀵐 􀵌 <izraz> (17. Produkcija)

􀖜 xε 􀵌 <izraz> (15. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <izraz>**-**<umnozak> (4. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <izraz>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (3. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <umnozak>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (2. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <umnozak>\*<potencija>**+**<umn ozak>**-**<umnozak> (6. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <potencija>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (5. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <potencija>**^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (9. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <faktor>**^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (8. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 <konstanta>**^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (10. Produkcija)

<broj>

􀖜 x 􀵌 ‐ **^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (12. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐<znamenka>**^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (14. Produkc.)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^**<faktor>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^**<konstanta>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^**<broj>\* <potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (12. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^**<znamenka>\*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \*<potencija>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \*<faktor>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (8. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \*<konstanta>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \*<broj>.<broj>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (13. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \*<znamenka>.<broj>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.**<broj>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2**.<znamenka>**+**<umnozak>**-**<umnozak> (14. Produkcija

**3^4** \***2.6+**

)

􀖜 x 􀵌 ‐ <umnozak>**-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<umnozak>**/**<potencija>**-**<umnozak> (7. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<potencija>**/**<potencija>**-**<umnozak> (5. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<faktor>**/**<potencija>**-**<umnozak> (8. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<konstanta>**/**<potencija>**-**<umnozak> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<broj>**/**<potencija>**-**<umnozak> (12. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<broj><znamenka>**/**<potencija>**-**<umnozak> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+**<znamenka><znamenka>**/**<potencija>**-**<umnozak> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+2**<znamenka>**/**<potencija>**-**<umnozak (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/**<potencija>**-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/**<faktor>**-**<umnozak> (8. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/**<konstanta>**-**<umnozak> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/**<broj>**-**<umnozak> (12. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/**<znamenka>**-**<umnozak> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<umnozak> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<potencija> (5. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<potencija>**^**<faktor> (9. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<faktor>**^**<faktor> (8. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<konstanta>**^**<faktor> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<broj>**^**<faktor> (12. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-**<znamenka>**^**<faktor> (14. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-2^**<faktor> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-2^**<varijabla> (10. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-2^**<slovo><niz> (11. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-2^x**<niz> (17. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4** \***2.6+21/7-2^x**<znamenka><niz> (15. Produkcija)

x 􀵌 ‐

􀖜 **3^4** \***2.6+21/7-2^x2**<niz> (16. Produkcija)

􀖜 x 􀵌 ‐ ε

􀖜 x 􀵌 ‐**3^4 \*2.6+21/7-2^x2**

**3^4** \***2.6+21/7-2^x2** (15. Produkcija)

Slika2

Stablo je izgrađeno zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka, odnosno primjenom

produkcija na krajnje lijeve nezavršne znakove.

Postupak obilaska stabla određuje redoslijed kojim se obilaze grane i čvorovi.

Uobičajeno je da se stablo obilazi primjenom desnog obilaska stabla. Desni obilazak

stabla rekurzivno obilazi sve neobiđene desne grane i čvorove. Postupci obilaska

stabla jednoznačno definiraju redoslijed primjene produkcija i redoslijed nezavršnih

znakova na koje se te produkcije primjenjuju. Desni obilazak stabla definira postupak

generiranja niza zamjenom krajnje lijevog nezavršnog znaka.

Čitamo li listove stabla s lijeva prema desno uočavamo da smo dobili niz iz primjera,

odnosno da gramatika dobro generira niz iz primjera.

**Zaključak**

U ovom seminarkom radu opisan je način izgrađivanja gramatike koja generira

matematičke izraze opisane u zadatku.

Osim toga nacrtano je i generativno stablo koje ona gradi pazeći na prioritet i

asocijativnost operatora.

Na primjeru je prikazano generiranje matematičkog izraza izgrađenom gramatikom i

nacrtano pripadno generativno stablo.

Kog izgrađivanja ove gramatike trebalo je paziti na prioritete operatora što je ujedno

bio i najzahtjevniji dio zadatka.

Uz to je trebalo paziti još i na asocijativnost određenih operatora.

Zadano je da operatori -, / i ^ budu lijevo asocijativni iako bi (prema mojim

saznanjima) ^ trebalo biti desno asocijativan. Zadatak sam riješila kako je tamo

definirano.

U zadatku nije bilo informacija o detaljima koji se tiču konstanti i varijabli pa sam

stoga definirala da varijable budu nizovi znakova (slova i/ili znamenki) s tim da je

početni znak slovo. Varijable sam definirala kao realne brojeve, tj omogućila sam

generiranje negativnih i pozitivnih cijelih brojeva i brojeva s pomičnim zarezom.

Konstante i varijale su zahtjevale uvođenje novih nezavršnih i završnih znakova, kao

i uvođenje pripadnih produkcija.

Ova jednoznačna gramatika generira matematičke izraze koje se koriste operatorima

^, \*, /, +, -, = te sa novouvedenom točkom .

Generativno stablo pokazuje da izgrađena gramatika generira matematički izraz

(niz) iz primjera i ne postoji drugo generativno stablo koje bi generiralo isti niz

koristeći ovu gramatiku pa stoga zaključujemo da je gramatika jednoznačna.